Μάθημα 10ο 16/04/2018

Συστήματα με ένα βαθμό ελευθερίας.

Τέτοια συστήματα είναι αυτά που χρειαζόμαστε μόνο μία παράμετρο για να καθορίσουμε πλήρως τη θέση του σώματος.

ΔΓΣ η εξίσωση: $m\ddot{x} = F(x)$, $x = x(t)$
έχει ως λύση την μοναδική παράμετρο $x = x(t)$
Η λύση της εξίσωσης καθορίζει πλήρως όλα τα στοιχεία της κίνησης

Θέση: $x = x(t)$
Ταχύτητα: $v = \dfrac{dx}{dt}$
Επιτάχυνση: $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ είναι ήδη καθορισμένη από την εξίσωση ($\ddot{x}$)

Έχουμε πει ότι ένα ολοκλήρωμα κίνησης αντιστοιχεί στην Α.Δ.Ε. (αρχή διατήρησης ενέργειας)

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = -\frac{dV}{dx}$$

Τότε: $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E \Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E - V)$

ή $$\boxed{\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V)}}$$ έχω γράψει την εξίσωση σε επιλύσιμη μορφή

Πρέπει να εξετάσω το πρόσημο του $E - V$
(Δε το γνωρίζω και είναι θέμα). Έστω θετικό

- α' βαθμός
- μη γραμμική (κακό)
- αυτόνομη (η ανεξ. μεταβλ. δηλ. ο χρόνος δεν παρουσιάζεται πουθενά)
- μη ομογενής (το E είναι ανεξάρτητο του x)
  (το γένος εδώ είναι των x)
  (Δεν έχουν όλα το ίδιο γένος → άρα μη ομογενής)

Άρα τη λύνω με τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)} \Rightarrow \frac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}}\,(E-V)^{1/2}} = \pm 1 \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

πολ/ζω μετά ⇒

$$(*) \Rightarrow dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}}\,(E-V)^{1/2}} \Rightarrow \boxed{t - t_0 = \pm \int_{x_0}^{x} [E-V]^{-1/2}\, dx'}$$

έχει λυθεί η διαφορική στο (*)

βρήκα την αντίστροφη συνάρτηση.
$t = x^{-1}$

Τις εξισώσεις που μπορούμε να τις αναγάγουμε στη μορφή του (*) λέγεται ολοκληρώσιμη

Η πλήρης λύση της διαφορικής εξίσωσης δίνεται αν γνωρίζουμε την αρχική θέση και ταχύτητα του ανακλήμενου.

Η εξίσωση $\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + V(x) = E$

έχει προκύψει από τον νόμο του Νεύτωνα δηλ. από εξίσωση 2ου βαθμού.

Άρα χρειαζόμαστε 2 αρχικές συνθήκες για να την περιγράψω.

$$E = \frac{1}{2} m [\dot{x}(t_0)]^2 + V(x(t_0)) = \frac{1}{2} m v_0^2 + V(x_0).$$

$v_0 = \dot{x}(t_0)$ και $x_0 = x_0(t_0)$

Πρέπει να διερευνήσουμε το πρόσημο της ποσότητας $E - V(x)$.

Θα λύσω την εξίσωση $E - V(x) = 0 \Rightarrow E = V(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow V(x) = E$

Αυτό συμβαίνει όταν $\dot{x} = 0$!!!

Άρα όταν η λύση δεν έχει καμία μεταβολή

(προκύπτει από την εξ.: $\frac{1}{2} m\dot{x} + \boxed{V(x) = E}$, $\frac{1}{2} m\dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0$)

<u>Όταν</u>: { α' βαθμός, αυτόνομες. $\Rightarrow$ κοιτάω πρώτα τα σταθερά σημεία.

γύρω από αυτά θα περιστρέφονται οι λύσεις (ελλειπτικές)

ΤΜΕΤ: σε έναν συγκεκρ. χώρο δημιουργώ περισσότερο ελικο-~~χώρο~~ όγκο απ' όσο χωράει

(Έχω υποβιβάσει το σύστημα από διαφορικό σε αλγεβρικό.)

Η λύση $x = x(t)$ για την οποία $V(x) = E$ καλείται θέση ισορροπίας ή λύση ισορροπίας, δηλ. αν ένα σωματίδιο τοποθετηθεί σε αυτό το σημείο ισορροπεί και έχει μηδενική ταχύτητα.

Όμως, από τον νόμο του Newton: $m\ddot{x} = F(x) = -\frac{dV}{dx} = 0$

(Αν το $V(x)$ είναι σταθερά: $dV = 0$) $V(x)=E$

Άρα τα σταθερά σημεία αντιστοιχούν στα ακρότατα της συνάρτησης $V(x)$!!

Συνεπώς η εξίσωση $m\ddot{x} = F(x)$ και η $\frac{1}{2}m\dot{x} + V(x) = E$ με $F = -\frac{dV}{dx}$ είναι ισοδύναμες.

Αν μπορώ να ρίξω την τάξη της εξίσωσης έστω και κατά ένα θα το κάνω! Διότι έχω περισσότερα οφέλη

Τρόπος Εύρεσης Σταθερών Σημείων

1. Λύση της Αλγεβρικής Εξίσωσης $F(x) = 0$
2. Λύση της Αλγεβρικής Εξίσωσης $V(x) = E$
3. Εύρεση των ακροτάτων της $V(x)$ ή $\frac{dV}{dx} = 0$

Και τα τρία (1,2,3) αφορούν το ίδιο πράγμα. και κάθε φορά θα παίρνω αυτό που βολεύει περισσότερο.

Τα όρια της κίνησης.

Τα όρια της κίνησης βρίσκονται χωρίς να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση. Δηλ:

$$\frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + V(x) = E \Rightarrow (\dot{x})^2 = \frac{2}{m}\left[E - V(x)\right] > 0$$

το μηδέν το έχω μελετήσει (είναι το σταθερό)

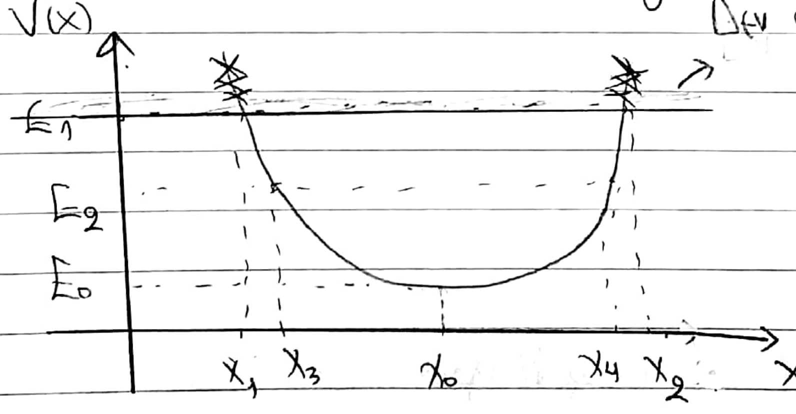
$$\Rightarrow E - V(x) > 0 \Rightarrow \boxed{V(x) < E}$$

Δηλ τα x δεν μπορούν να υπερβούν την λύση.

Δηλ η δυναμική ενέργεια του συστήματος δεν μπορεί να υπερβεί ποτέ τη συνολική ενέργεια.
(Το πολύ πολύ να γίνει ίση)

Το Δυναμικό $V = V(x)$

① Δυναμικό που παρουσιάζει ελάχιστο



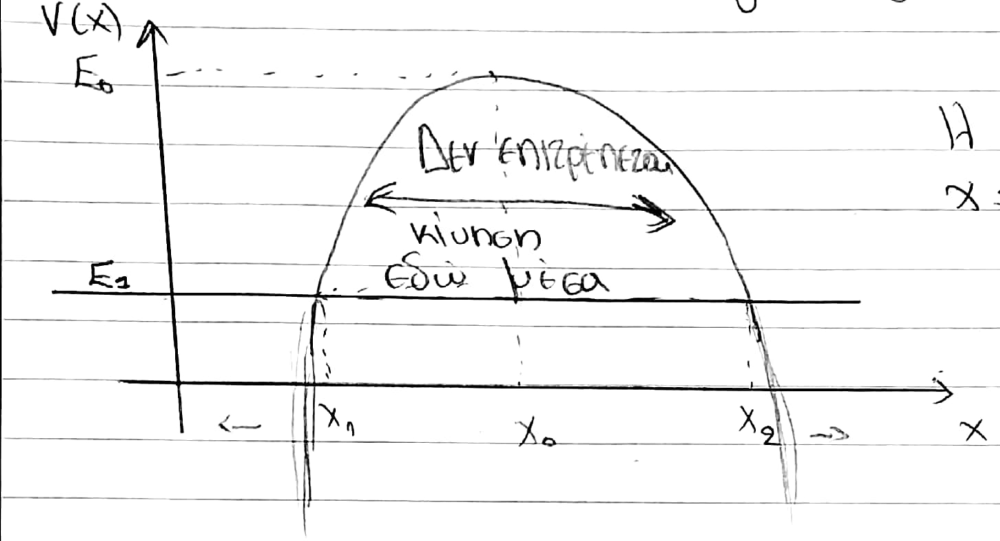
Δεν ορίζεται από την γραμμή και πάνω

Πρέπει να το διαβάσουμε ως συνάρτηση του x (της θέσης)

Θεωρούμε το δυναμικό του σχήματος και E_1 είναι η συνολική ενέργεια του συστήματος, δηλ: $\boxed{V(x) \le E_1}$

$\Rightarrow x_1 \le x \le x_2$ (όρια της κίνησης)

2) Δυναμικό που παρουσιάζει μέγιστο



Η λύση $V(x) \leq E_1 \Rightarrow$
$x \leq x_1$ και $x \geq x_2$

V(x) : παραβολή θετική (προς τα πάνω) → η κίνηση μέσα
παραβολή ανάποδα (αρνητική) → η κίνηση έξω

Αν το δυναμικό παρουσιάζει ελάχιστο η κίνηση γίνεται εντός του χωρίου, ενώ εάν παρουσιάζει μέγιστο γίνεται εκτός του χωρίου τα.

Παράδειγμα
Να βρεθούν τα όρια της κίνησης ενός σώματος που εκτοξεύεται σε κατακόρυφη διεύθυνση από την επιφάνεια της Γης με ταχύτητα V_0.

Λύση
Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα κ. Νόμο του νόμο της Παγκόσμιας έλξης:

$$m\ddot{r} = F(r)$$

$$\vec{F}(r) = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2},$$

G σταθερά παγκόσμιας έλξης
M μάζα της Γης

$t=0 \begin{cases} r(0) = R & \text{ακτίνα Γης} \\ \dot{r}(0) = V_0 \end{cases}$

Άρα ότι σώμα και να εκτοξεύσω από την επιφάνεια η κίνηση του δεν θα εξαρτάται από την μάζα του (σε ιδανικές συνθήκες)

Η διαφορική εξίσωση που έχουμε είναι:

- 2ου βαθμού
- μη γραμμική
- αυτόνομη και λείπει η ενδιάμεση παράγωγος ($\dot{r}$)

Άρα κατεβάζω αμέσως την τάξη της ⇒
Πολ/ζω με $\dot{r}$ και ολοκληρώνω:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = -GM\underbrace{\int\frac{\dot{r}\,dt}{r^2}}_{\int\frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{r}} + E = \frac{GM}{r} + E$$

Άρα: $\dot{r}^2 = \frac{2GM}{r} + 2E$

$t=0: \begin{cases} r(0) = R \\ \dot{r}(0) = V_0 \end{cases}$ ⇒ $\boxed{E = \frac{1}{2}V_0^2 - \frac{GM}{R}}$ (*)

~~Άρα θέλω~~ τα όρια της κίνησης να είναι: $\cancel{\frac{2GM}{r} + 2E \geq 0 \Rightarrow \frac{GM}{r} \geq -E \Rightarrow r \leq -\frac{GM}{E}}$

(*) $E > 0 \Rightarrow \frac{1}{2}V_0^2 - \frac{GM}{R} > 0 \Rightarrow \boxed{V_0^2 > \frac{2GM}{R}}$

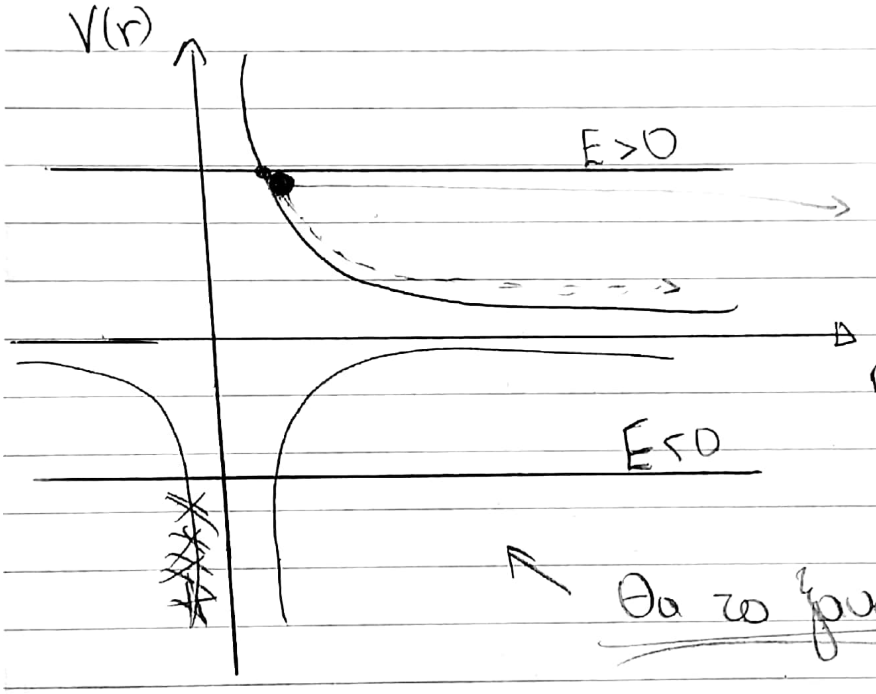
Scanned by CamScanner

Τα όρια της κίνησης είναι $r > 0$ αν $E > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{V_0 > \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$

Ταχύτητα Διαφυγής

$E < 0$ δηλ. $\frac{GM}{r} > -E \Rightarrow \boxed{r < -\frac{GM}{E}}$



→ Αφήνω εκεί το μπαλάκι
Θα πάει προς τα κάτω

↖ Θα το ξαναδούμε